DISKRETE MATHEMATIK

Der Sonderforschungsbereich »Diskrete Strukturen in der Mathematik« (SFB 343) wurde zum 1.7.1989 eingerichtet und befindet sich zur Zeit in der sogenannten Zweiten Antragsphase. Mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft von jährlich etwa 2 Millionen DM werden 12 Teilprojekte gefördert. Was heißt »diskrete Mathematik«? Das Begriffspaar »diskret-kontinuierlich« wird am Spektrum eines Atoms deutlich: Es besteht einerseits aus abzählbar vielen diskreten Linien, deren Muster für das Atom charakteristisch ist, andererseits aus einem kontinuierlichen Band. Im Altertum war die Mathematik im wesentlichen diskret: Kommensurabilität war der zentrale Begriff, ohne den Längen von Strecken nicht verglichen werden konnten; diophantische Gleichungen standen im Zentrum mathematischer Forschung. Die grundsätzlichen Schwierigkeiten bei der Beschreibung von Bewegungen (Achilles und die Schildkröte) wurden nicht beherrscht. Weltweit versteht man unter »diskreter Mathematik« das Studium diskreter Aspekte mathematischer Fragestellungen, vor allem die Untersuchung endlicher und abzählbar unendlicher mathematischer Strukturen. Dazu rechnet man die endlichen Gruppen, endlich erzeugte Algebren, Graphen, Matroide und Folgenräume, die Kombinatorik, simpliziale Komplexe, Pflasterungen und Stratifikationen in der Geometrie, diskrete Modelle in der Informationsverarbeitung und in der Statistik. Solche Strukturen spielen in weiten Bereichen der Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete eine wichtige Rolle.

In den letzten Jahren erfährt die diskrete Mathematik einen starken Aufschwung, der insbesondere den Anwendungen in Gebieten, die mathematischer Modellierung zugänglich sind, zu verdanken ist. So werden heute in weiten Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Verwaltung mathematische Erkenntnisse und Techniken unmittelbar benutzt, um die dort auftretenden Analyse- und Steuerungsprobleme zu bewältigen. Das liegt sicher zum einen daran, daß diese Probleme größer und unüberschaubarer geworden sind; zum anderen werden mathematische Anwendungen durch die Entwicklung immer leistungsfähigerer Rechenanlagen erst möglich. Um aber einen Digitalrechner zur Lösung eines Problems nutzen zu können, muß das Problem notwendigerweise diskret formuliert sein. Zunehmend ergeben sich so aus praktischen Anforderungen neue mathematische Fragen: Soll ein Problem nicht von Fall zu Fall gelöst werden, bedarf es einer strukturellen Analyse und einer mathematischen Theorie. »Diskrete Strukturen in der Mathematik« ist eine Bielefelder Begriffsbildung. Sie soll die diskrete Mathematik umfassen, ohne den Eindruck zu erwecken, konkrete Anwendungen, etwa die Entwicklung von Chips, abzudecken; sie soll aber auch Strukturen erfassen, die mit diskreten Invarianten beschrieben oder klassifiziert werden können.

Seit Beginn des 17. Jahrhunderts ist das traditionelle Bild der Mathematik wesentlich geprägt durch das Bemühen, die geometrischen Eigenschaften des physikalischen Raumes zu verstehen. Die von Leibniz und Newton begründete Infinitesimalrechnung und die Ausarbeitung ihrer Konsequenzen in den folgenden Jahrhunderten war und ist zugleich eine unabdingbare Voraussetzung der heutigen Natur- und Ingenieurwissenschaften. In der Folge waren mathematische Probleme stets aufs engste mit Fragen über reelle oder komplexe Zahlen verknüpft. Wie Euler, der sich auch mit diskreter Mathematik beschäftigte, zeigte, lassen sich sogar viele kombinatorische Anzahlprobleme mittels analytischer Funktionen behandeln. Daneben hat es jedoch immer Tendenzen in der Mathematik gegeben, sich unmittelbar den diskreten Aspekten mathematischer Fragestellungen zuzuwenden. So führte etwa die Diskussion des Symmetriebegriffs, die Galoistheorie und die Analyse gewisser zahlentheoretischer Schlußweisen zur Gruppentheorie, insbesondere der Theorie der endlichen Gruppen, die mit der mit algebraischkombinatorischen Hilfsmitteln erzielten Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen einen vorläufigen Höhepunkt aufweist. Strukturüberlegungen ähnlichen Typs haben aber auch bei der Konstruktion von Codes und bei der Untersuchung endlicher Geometrien und Designs eine Rolle gespielt. Ebenso bilden die von der kombinatorischen Topologie eingeführten simplizialen Methoden ein wesentliches Hilfsmittel in der algebraischen Topologie, in der homologischen Algebra und in der K-Theorie.

Nicht nur von der Theorie, sondern ebenso von den Anwendungen her stellen sich vielfältig diskrete Probleme. Polyas Abzähltheorie diente z.B. der Abzählung von Alkoholisomeren; die Beschreibung der räumlichen Struktur von Molekülen führte über die Graphentheorie in die Matroidtheorie, welche ihrerseits wieder mit ebenfalls stark anwendungsorientierten Fragen aus dem Bereich der diskreten Optimierung in Beziehung steht; die Klassifikation der kristallographischen Gruppen diente und dient vor allem der Analyse konkret vorfindbarer Kristalle. Auch für Probleme, die zunächst nicht diskreter Natur sind, ist es häufig unvermeidlich, nach diskreten Versionen zu suchen, welche die zu untersuchenden Aspekte der Ausgangsfragen angemessen repräsentieren. Hier wird nicht primär auf ein numerisches Ergebnis gezielt, aber das Studium des diskretisierten Problems ergibt oft Aufschluß qualitativer Art und liefert strukturelle Einsichten, die hinsichtlich der ursprünglichen Fragen von großem Nutzen sein können.

Der SFB »Diskrete Strukturen in der Mathematik« gliedert sich in Teilprojekte, die in drei Projektbereichen mit folgenden Aufgaben betraut sind:

A. Simpliziale Methoden und ihre Anwendungen
- Ringe bis auf Homotopie und aus solchen »Ringen« abgeleitete Funktoren sowie deren Anwendung in Geometrie und Algebra;

- Arithmetische und S-arithmetische Gruppen und deren Endlichkeitseigenschaften wie endliche Erzeugbarkeit und endliche Präsentierbarkeit sowie analoge höhere Eigenschaften dieser Art, generische Zerfällung linearer algebraischer Gruppen, KacMoody Gruppen, Arithmetik und K-Theorie, computergestützte Untersuchungen in der Gruppentheorie; Computeralgorithmen zum Homöomorphieproblem von kompakten 3-Mannigfaltigkeiten;
- Analysis diskreter Isometriegruppen, Quadratische Formen, Thetakorrespondenz;
- Klassifikation und Konstruktion von Pflasterungen und ihrer Fundamentalbereiche, Topologische und kombinatorische Eigenschaften von Kammernsystemen, Höherdimensionale Pflasterungen, Burnsideringe.

B. Diskrete Modelle
- Systematischer Aufbau einer Kombinatorik von Folgenräumen;
- Weiterentwicklung einer Theorie der Informationsübertragung für »multiple access« und Untersuchung, was diese Theorie für andere Disziplinen leistet;
- Asymptotische Verteilung nicht-parametrischer Statistiken, Nichtstationäre singuläre Störungen endlicher Markovprozesse;
- Partitionstheorie, Diskrepanzen, Zufällige diskrete Strukturen, Graphentheoretische Invarianten;
- Anwendungen der Theorie der Matroide mit Koeffizienten, Bewertete Matroide, Delta-Matroide und (W,P)Matroide, Kombinatorische Theorie metrischer Räume, Sequenzanalyse;
- Numerische Verfahren für strukturierte Probleme, Parallele Algorithmen, Variationssätze, Parameterabhängige Eigenwerte und Eigenvektoren, Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten.

C. Diskrete Methoden in der Algebra
- Charaktere endlicher Gruppen, Parabolische Systeme;
- Zahmer und wilder Darstellungstyp, Kombinatorisch definierte Algebren, Berechnung kombinatorischer Invarianten, Quadratische Algebren, Triangulierte Kategorien, Algebren mit endlicher globaler Dimension, Quasierbliche Algebren, Hall-Algebren, Endliche algebraische Gruppen und Hopf-Algebren;
- Reduktion von Shimura-Mannigfaltigkeiten.

Mathematische Forschung erfordert weltweiten Kontakt mit den unterschiedlichsten Forschungseinrichtungen, insbesondere die persönliche Zusammenarbeit von Wissenschaftlern. Neben geringen Reisemitteln wurde ein umfangreiches Gästeprogramm bewilligt. Damit ist es dem SFB möglich, jährlich etwa 100-120 Mathematiker für etwa einen Monat einzuladen. Naturgemäß haben diese Gäste engen Kontakt zu den Aktivitäten der Teilprojekte. Gelegentlich werden auch Tagungen zu übergreifenden Themenbereichen durchgeführt. Neben dem Gästeprogramm hat der SFB die Möglichkeit, mehrjährige Verträge mit meist jüngeren Mathematikern abzuschließen, die ohne Lehrbelastungen in den Teilprojekten mitarbeiten. In geringem Umfang gibt es Möglichkeiten, Promotionen zu fördern.

Bernd Fischer